THEORY AND APPLICATIONS OF THE NOTION OF THE ANALYTIC SIGNAL

by J. VILLE
Doctor of Sciences
Telecommunications Laboratory of the Alsatian Society
of Mechanical Constructions

This publication by J. Ville[3] provides a formal basis for time-frequency methods. It develops the results of Carson and Fry[1] 1937, and Gabor[2] 1946. In particular, it introduces the *analytic signal*. Ville's paper has not been widely known, in part due to the fact that it was published in French and at a time when access to a wide range of Journals was less convenient.

A copy of this paper is available in English and in French. The English translation is produced from the same TEX source as the French one. I used a conditional statement to select either the French or the English text. This allowed keeping a single copy of all the displayed equations. Thus, if there are any remaining errors in the displayed equations, they must occur in both versions, but only need to be corrected once.

The English translation was completed in April 2011. There may be typographical and translation problems. So far, only I have done proof reading. Any suggestions for corrections or improvements would be most welcome. In March 2013 a few minor typos were corrected, a number of imprecise wordings were improved, and the layout was also improved for both the English and the French versions.

In February 2017 after Carver Mead pointed out some typos I rechecked the equations and found a substantial number of typos. These were corrected and a few translation clarifications were made. I updated the Web references to the *Internet Archive* which is the stable repository for both the English and French versions. If any updates become required they will appear there.

References

[1] J. R. Carson and T. C. Fry. Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency-modulation. *Bell Syst Tech J*, 16, i4:513–540, 1937.

[2] D. Gabor. Theory of communication. *J. IEE*, 93, pt. III:429–457, 1946.

[3] J. Ville. Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique. *Câbles et Transmissions*, 2, no. 1:61–74, 1948.

Michael D. Godfrey
February 2017

Stanford University
email: michaeldgodfrey@gmail.com
website: sites.google.com/site/michaeldgodfrey

Câbles et Transmissions, 2e A., N° 1, pp. 61–74, 1948

THÉORIE ET APPLICATIONS DE LA NOTION DE SIGNAL ANALYTIQUE

par J. VILLE
Docteur ès-sciences
Laboratoire de Télécommunications de la Société Alsacienne
de Constructions Mécaniques

RÉSUMÉ

Le présent article est une contribution au problème de la représentation mixte d'un signal, par une répartition bidimensionnelle de l'énergie dans un domaine rapporté à deux axes, l'axe des temps et l'axe des fréquences. L'auteur propose une telle répartition, en utilisant des opérateurs analogues à ceux employés en mécanique quantique. Il parvient ainsi à une définition du spectre instantané d'un signal, et de la répartition de l'énergie attachée à une fréquence. Par intégration (par rapport au temps) du spectre instantané (qui varie avec le temps) on retrouve le spectre au sens usuel du terme. L'auteur définit également la fréquence instantanée d'un signal, en utilisant la notion de signal analytique (obtenu par prolongement analytique du signal réel quand le temps est considéré comme une variable complexe). Ces notions de fréquence instantanée et de spectre instantané sont appelées à fournir une base théorique ferme aux recherches sur la modulation de fréquence, sur l'analyse harmonique continue, sur la compression de fréquences et, d'une manière générale, à tous les problèmes pour lesquels l'analyse harmonique classique fournit une représentation s'écartant par trop de la réalité physique.

PLAN

TABLEAU DONNANT LA LISTE
DES PRINCIPAUX SYMBOLES EMPLOYÉS

t	temps.
$s(t)$	signal réel.
$\sigma(t)$	signal en quadrature.
$\Psi(t)$	$= s(t) + j\sigma(t)$: signal analytique.
f	fréquence (en cycles).
ω	fréquence (en radians).
$s(\omega)$	spectre d'un signal (la fréquence étant exprimée en radians).
$\Phi(f)$	spectre d'un signal (la fréquence étant exprimée en cycles).
$\bar{t}$	valeur moyenne d'un temps.
$\bar{f}$	fréquence moyenne.
t_f	époque moyenne attachée à la fréquence f.
f_t	fréquence instantanée à l'instant t.
	D'une manière générale, nous avons comme d'usage :
j	= l'unité imaginaire.
z^*	nombre imaginaire conjugeé de z.
$\bar{\mu}$	valeur moyenne de la quantité μ.
$\|\mu\|$	module de μ.

I. — NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Les articles fondamentaux traitant de la théorie générale des régimes à ≪fréquence variable≫ sont :

J. R. Carson and T. C. Fry, “Variable Frequency Electric Circuit Theory,” *Bell System Technical Journal,* 1937, t. XVI, p. 513.

D. Gabor, “Theory of Communication,” *Journal of the Institution of Electrical Engineers,* vol. 931 part III, no. 26, Nov. 1946, p. 429.

Dans le premier de ces articles, on étudie le comportement, à la traversée d’un réseau, d’un signal de la forme cos $\left[\int \omega(t)dt + \varphi\right]$, de fréquence variable $\omega(t)$. Dans le second, l’auteur est amemé à décomposer un signal et une série double de signaux, chacun des signaux élémentaires occupant un certain domaine dans le diagramme bidimensionnel temps-fréquences. Carson, Fry et Gabor, ont ainsi considéré des représentations mixtes, décomposent un signal à la fois dans le temps et l’échelle des fréquences, mais sans donner une définition exacte de la répartition de l’énergie dans un pareil diagramme, ce qui laisse ainsi un certain arbitraire dans les modes de représentation adoptés par eux; dans le présent travail au contraire, une répartition bidimensionnelle de l’énergie est recherchée, qui ne préjuge rien de la forme des signaux élémentaires utilisés pour faire l’analyse du signal donné.

II. — INTRODUCTION.

1. Quantité d’information transmise et complication d’un signal.

La transmission des signaux de télécommunications se fait par l’intermédiaire d’une transmission d’énergie, généralement d’énergie électromagnétique ou acoustique. Au contraire de ce qui se passe dans les transport de force, ce n’est pas tant l’énergie transportée elle-même qui est intéressante, que les variations de cette énergie au cours du temps. Plus compliquée est la fonction représentant, en fonction du temps, la variation de tension, d’intensité, de pression, ou de tout autre élément porteur d’information, plus grande est la quantité d’informations portée par l’énergie transmise.

2. Évaluation de la complication d’un signal par le nombre d’harmoniques appréciables que contient son développement de Fourier.

Pratiquement, pour évaluer le degré de complication d’une fonction intervenant dans un système de transmission, on procède à son analyse harmonique, c’est-à-dire qu’on la décompose en composantes sinusoïdales, sous forme de série ou d’intégrale de Fourier. Une fonction $s(t)$ est ainsi considérée de deux points de vue différents :

a) **du premier point de vue,** on considère la fonction directement ; à chaque valeur de t est associée une valeur de s, et la fonction est d’autant plus compliquée que la courbe représentative exprimant s en fonction de t présente plus de variations. Dans le cas de signaux acoustiques, ce premier point de vue est assez difficile à préciser ; dans le cas de signaux télégraphiques au contraire, constitués par une série de créneaux de même largeur et de même hauteur, on voit facilement qu’une fonction est d’autant plus compliquée que l’on peut loger davantage de créneaux dans un intervalle de temps donné.

b) **du deuxième point de vue,** on considère la fonction comme composée de la superposition de fonctions sinusoïdales, différant par leur amplitude et leur phase. La fonction est d’autant plus compliquée qu’elle contient davantage de composantes sinusoïdales d’amplitude appréciable. Ce deuxième point de vue est intéressant pour l’étude des distorsions ; si, en effet, le signal est transmis à travers un système distorsif qui supprime certaines composantes sinusoïdales, il y a dans cette déformation une perte d’information que l’on peut évaluer. On voit de même que l’on pourra évaluer la quantité maximum d’information que peut transmettre une voie de télécommunications, cette quantité étant proportionnelle au nombre de fréquences indépendantes que la voie peut porter. La considération de ce deuxième point de vue est donc essentielle dans la théorie des télécommunications.

3. Nécessité de développements mixtes, en temps et fréquence, pour l'étude de certaines questions.

Il existe des questions où les points de vue précédents sont insuffisants. Dès que l'on cherche à utiliser au maximum une voie de télécommunications, on est amené à renoncer à la transmission intégrale d'un signal ; de toutes manières, des déformations sont inévitables. On sait en particulier que si l'impression physiologique produite par une superposition d'harmoniques n'était pas dans une certaine mesure indépendante de la phase relative de ces harmoniques, aucune transmission téléphonique à longue distance ne serait possible. De même le problème de la compression de fréquence serait physiquement insoluble s'il fallait respecter, dans la compression de fréquences, les déphasages respectifs des différentes composantes. Mais cette tolérance dans la transmission n'est admissible que dans certaines limites de temps. Si nous considérons uné note continue, émise par un orgue par exemple, nous pouvons déphaser les harmoniques sans défigurer le son. Mais,si nous considérons une symphonie, et que nous développions en série de Fourier le son correspondant, nous obtiendrons une série d'harmoniques, *s'étendant sur toute la durée de la symphonie,* que nous ne pouvons évidemment pas déphaser arbitrairement.

Nous voyons ainsi la nécessité d'aller plus avant dans l'analyse harmonique d'une fonction. Nous allons montrer sur le cas particulier d'un signal acoustique dans quelle voie générale nous devons nous diriger.

4. Premières indication sur la notion de spectre instantané.

A l'audition d'un morceau de musique il n'y a aucun rapport entre l'impression physiologique éprouvée à un instant donné et l'amplitude du signal acoustique $s(f)$ considéré : l'oreille ne réagit qu'à une *succession* de valeurs de $s(t)$. Mais cela n'entraîne point que la définition de $s(f)$ par ses composantes sinusoïdales soit parfaite. Si nous considérons en effet un morceau contenant plusieurs mesures (ce qui est le moins qu'on puisse demander) et qu'une note, *la* par exemple, figure une fois dans le morceau, l'analyse harmonique nous présentera la fréquence correspondante avec une certaine amplitude et une certaine phase, sans localiser le *la* dans le temps. Or, il est évident qu'au cours du morceau il est des instants où l'on n'entend pas le *la.* La représentation est néanmoins mathématiquement correcte, parce que les phases des notes voisines du *la* sont agencées de manière à détruire cette note par interférence lorsqu'on ne l'entend pas et à la renforcer, également par interférence, lorsqu'on l'entend ; mais s'il y a dans cette conception une habileté qui honore l'analyse mathématique, il ne faut pas se dissimuler qu'il y a également une défiguration de la réalité : en effet, quand on n'entend pas le *la,* la raison véritable est que le *la n'est pas* émis.

Il est donc souhaitable de rechercher pour un signal une définition mixte, du genre de celle préconisée par Gabor : à chaque instant, se présentent un certain nombre de fréquences donnant la hauteur et le timbre du son tel qu'on l'entend ; à chaque fréquence est associée une certaine répartition, dans le temps qui définit les intervalles pendant lesquels la note correspondante est émise. On est ainsi conduit à la définition d'un *spectre instantané, fonction du temps,* donnant la structure d'un signal à un instant donné ; le spectre du signal, au sens usuel du terme, qui donne la structure en fréquences du signal pendant toute sa durée d'émission, s'obtient alors en cumulant tous les spectres instantanés (d'une manière précise en les intégrant relativement au temps). D'une manière corrélative, on est amené à une répartition des fréquences dans le temps ; en intégrant ces répartitions, on reconstitue le signal.

Malheureusement, les choses ne sont pas si simples qu'elles paraissent à première vue. Nous voyons en effet que nous avons à envisager *l'analyse harmonique continue* d'un signal ; or, pour une telle analyse, nous pouvons soit :

d'abord découper le signal en tranches (dans le temps) par un commutateur ;

ensuite présenter ces différentes tranches à un système de filtres, pour les analyser.

Soit :

d'abord filtrer différentes bandes de fréquences ;

ensuite découper ces bandes en tranches (dans le temps), pour étudier leurs variations d'énergie.

L'analyse harmonique continue consiste donc à appliquer deux opérateurs (filtrage et commutation).

Or, ces deux opérateurs sont tels que chacun d'eux, s'il est très précis (tranches très brèves ou bandes très étroites) rend l'autre inopérant, parce qu'il déforme le signal d'une fàçon considérable (par l'introduction de courants transitoires pour la commutation, d'un grand étalement dans le temps pour les filtres à bandes étroites). La détermination du spectre instantané ne peut donc se faire, physiquement, que d'une manière approchée. Mais là se pose à notre avis, une question : une manière approchée *de quoi?* C'est pourquoi nous avons essayé d'obtenir une définition précise du spectre instantané, de manière à avoir une base théorique, jusqu'ici absolument inexistante, pour guider les recherches dans la spécification d'appareils d'analyse harmonique continue, de compression de fréquence, ou tous autres dispositifs pour la compréhension desquels les notions classiques de fréquence et de spectre sont insuffisantes.

Après ces considérations générales, nous allons poser la question en termes plus précis :

5. Position générale du problème du spectre instantané et de la fréquence instantanée.

On sait les difficultés que présente la définition de la fréquence instantanée d'un signal. Ces difficultés tiennent essentiellement à ce que la fréquence d'un signal sinusoïdal n'est définie rigoureusement que dans le cas ou le signal a une durée indéfinie ; quant au spectre d'un signal $s(t)$, qui a pour expression

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int s(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1}$$

il est défini pour l'ensemble du signal, et ne contient pas le temps d'une manière explicite. Donc, dans la théorie classique, ni le spectre instantané, associé à un instant t, ni la fréquence instantanée ne sont susceptibles de définition. Il s'agit pourtant là de notions intuitives. Si, par exemple, nous considérons un signal lentement modulé en fréquence, de la forme :

$$s(t) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t\right) \tag{2}$$

il est évident que la ≪fréquence instantanée≫ (qui est définie conventionnellement dans le cas de la modulation de fréquence) :

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t\right) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t \tag{3}$$

a une signification physique, et cela d'une manière d'autant plus précise que Ω est plus petit par rapport à ω_0.

Nous nous proposons ici de donner une définition du spectre instantané, valable pour une catégorie de signaux assez étendue, et de développer quelques applications des considérations auxquelles ce problème nous aura conduits. La définition que nous proposons fait appel à des conventions qui peuvent paraître arbitraires, mais qui se justifient par la cohérence des résultats et leur parallélisme avec des conventions analogues qui se sont révélées fécondes en mécanique quantique.

Notre point de départ est le suivant : il a été facile d'associer une fréquence instantanée au signal (2) parce que ce signal ≪peut étre considéré≫ comme la partie réelle du signal

$$\Psi(t) = e^{j(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \omega t)} \tag{4}$$

lequel *est à module constant.* La fréquence instantanée, en radians/sec, n'est alors autre que :

$$\omega = \frac{d}{dt} \arg \Psi \tag{5}$$

Nous aurons donc, dans le cas d'un signal quelconque, à le prolonger dans le plan complexe, de manière à le mettre sous la forme :

$$s(t) = \frac{1}{2}\Big[\Psi(t) + \Psi^*(t)\Big] \tag{6}$$

et nous obtiendrons ainsi la fréquence instantanée par la formule (5) ; $\Psi(t)$ sera appelé *signal analytique*. La première partie de l'article sera consacrée à l'établissement des formules correspondantes. Pour justifier, d'un autre point de vue, cette définition de la fréquence instantanée, nous la rattacherons à la notion de vitesse de groupe, ce qui constituera une deuxième partie. Nous passons ensuite à la notion de spectre instantané, parce que la fréquence instantanée ne définit un signal que d'une manière assez grossière, et doit étre considérée comme la valeur moyenne, à un instant donné, des fréquences figurant dans le spectre instantané. Nous traitons cette question dans une troisième partie, d'après les principes suivants : un signal peut être considéré comme le support d'une certaine quantité d'énergie, dont on connaît la répartition dans le temps (donnée par la forme du signal) et dans l'échelle des fréquences (donnée par le spectre). Si le signal s'étend sur un intervalle de temps T et un intervalle de fréquences Ω, nous avons ainsi une répartition d'énergie dans un rectangle d'aire TQ. Nous connaissons les projections de cette distribution sur les côtés du rectangle, mais nous ne la connaissons pas dans le rectangle lui-méme. Si nous cherchons à déterminer la distribution dans le rectangle, nous nous heurtons à la difficulté suivante : si nous découpons le signal dans l'échelle des temps, nous étalons les fréquences ; si nous le découpons dans l'échelle des fréquences, nous étalons les temps. On ne peut donc pas déterminer la distribution par des mesures successives. Il faut donc chercher une détermination simultanée, qui n'a qu'une signification théorique : pour cela, nous devons opérer *soit* sur le signal, *soit* sur le spectre. Or, pour le signal par exemple, si le temps est une variable, la fréquence est, à proprement parler, un opérateur (à savoir l'opérateur $1/2\pi j\ d/dt$ pour des fréquences en cycles/sec). Nous avons déterminé la distribution simultanée de t et de $1/2\pi j\ d/dt$, par les méthodes du calcul des probabilités, qui conduit facilement au spectre instantané (et, également, à la répartition, dans le temps, de l'énergie attachée à une fréquence). On voit ainsi que le caractère formel du mode de calcul employé est imposé par la nature de la difficulté rencontrée, qui est analogue à celle qui se présente en mécanique quantique, quand on doit composer des opérateurs non permutables. Nous utilisons beaucoup de résultats dus à Gabor (Theory of Communication), et employons les mêmes notations, ce qui nous dispense de démontrer certains résultats, et nous permet de développer principalement les points de vue nouveaux. Enfin, une quatrième partie contient quelques applications de la notion de signal analytique qui nous a été imposée, comme nous l'avons dit, dans la recherche de la fréquence instantanée.

III. — PREMIÉRE PARTIE : SIGNAUX ANALYTIQUES ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE.

6. Prolongement d'un signal réel dans le plan complexe.

Considérons le signal :

$$s(t) = \cos \omega t \tag{1}$$

Nous pouvons le considérer, indifféremment, comme partie réelle de :

$$\Psi(t) = e^{j\omega t} \tag{2}$$

ou de :

$$\Psi^*(t) = e^{-j\omega t} \tag{3}$$

Tant que t ne prend que des valeurs réelles, il n'y a pas de raison pour choisir l'une de ces deux formes plutôt que l'autre. Ce n'est que si t prend des valeurs complexes

$$t = \tau + j\theta \tag{4}$$

que nous voyons apparaître des différences. Si, en effet, θ tend vers $+\infty$, Ψ tend vers zéro et Ψ^* vers l'infini.

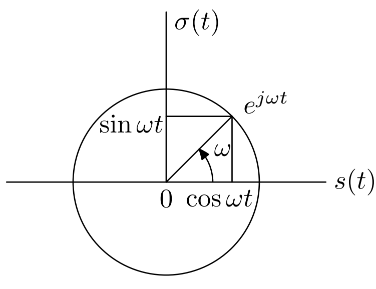


Fig. 1. — *La fréquence instantanée* ω *d'un signal* $\cos \omega t$ *est la vitesse angulaire du point coordonnées :* $\cos \omega t, \sin \omega t$ ($\sin \omega t$ *: signal en quadrature de* $\cos \omega t$).

Si nous convenons de ne conserver, dans la mesure du possible, que des fonctions régulières dans le demi-plan supérieur, nous choisirons donc (*fig.* 1)

$$\Psi(t) = e^{j\omega t} \tag{5}$$

Prenons un autre exemple simple. Soit le signal :

$$s(t) = \frac{1}{1+t^2} \tag{6}$$

Nous pouvons le considérer indifféremment comme partie réelle des deux fonctions :

$$\frac{1}{1+jt} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1-jt}$$

Une seule d'entre elles, la seconde, est régulière dans le demi-plan, supérieur ; nous choisirons donc

$$\Psi(t) = \frac{1}{1-jt} \tag{7}$$

Considérons un troisième exemple. Soit le signal :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & : -1 < t < +1 \\ 0 & : t < -1 \quad \text{ou} \quad t > 1 \end{cases} \tag{8}$$

Nous pouvons considérer $s(t)$ comme partie réelle de :

$$\Psi(t) = \frac{1}{\pi j} \log \frac{t-1}{t+1} \tag{9}$$

avec une détermination convenablement choisie. La fonction (9) n'est pas uniforme ; nous la rendrons uniforme dans le demi-plan supérieur en excluant de ce demi-plan les points singuliers -1 et $+1$.

D'une manière générale, les principes ci-dessus conduisent à associer au signal $s(t)$ le signal *en quadrature,*

$$\sigma(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau) d\tau}{\tau - t} \tag{10}$$

et la fonction

$$\Psi(t) = s(t) + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \tag{11*}$$

La formule (11) définit $\Psi(t)$ comme fonction de la variable complexe t, holomorphe dans le demi-plan supérieur. On démontre que, réciproquement, on a, pour t réel :

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\tau) d\tau}{\tau - t} \tag{12}$$

---

* L'article original a donné cette équation comme:

$$\Psi(t) = s(t) + j\sigma(t) = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau) d\tau}{t - \tau} \tag{11}$$

Prof. Thomas Schanze a remarqué cela et a fourni la correction.

7. Signaux analytiques. On peut les considérer comme résultat de la modulation de leur enveloppe par une porteuse elle-même modulée en fréquence. Fréquence instantanée.

Un signal tel que $\Psi(t)$ sera appelé *signal analytique.* Nous pouvons alors définir $s(t)$ par :

$$s(t) = \mathrm{R}_e\left[|\Psi(t)|e^{j\arg\Psi}\right] \tag{13}$$

ce qui nous définit $s(t)$ comme le résultat *de la modulation du signal $e^{j\arg\Psi}$ par le signal* $|\Psi|$. Si nous considérons que $|\Psi|$ représente *l'enveloppe* de $s(t)$, et que $e^{j\arg\Psi}$ est un signal *modulé en fréquence,* nous obtenons pour la fréquence instantanée l'expression (*fig.* 2).

$$f_t = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\arg\Psi = \frac{1}{4\pi j}\frac{\Psi^*}{\Psi}\frac{d}{dt}\frac{\Psi}{\Psi^*} \tag{14}$$

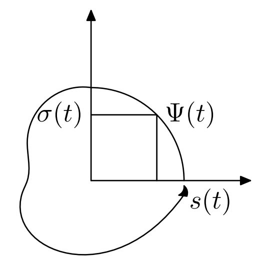


Fig. 2. — La *fréquence instantanée du signal $s(t)$ est la vitesse angulaire du point $\Psi(t) = s(t) + j\sigma(t)$, où $\sigma(t)$ est le signal en quadrature de $s(t)$.*

Pour $s(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \Psi(t) & = e^{j(\omega t+\varphi)} \\ f_t & = \frac{\omega}{2\pi} \end{cases} \qquad \omega > 0 \tag{15}$$

La fréquence instantanée est constante pour ce signal. Si nous considérons le signal :

$$s(t) = \frac{1}{1+t^2} = \mathrm{R}_e\left[\frac{1}{1-jt}\right]$$

nous obtenons :

$$f_t = \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{1+t^2} \tag{16}$$

Considérons maintenant un signal sinusoïdal modulé :

$$s(t) = \cos\omega t\cos\Omega t \qquad \Omega > \omega > 0$$

nous avons alors :

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j(\Omega+\omega)t} + e^{j(\Omega-\omega)t}\right]$$

$$|\Psi(t)| = \cos\omega t \qquad f_t = \frac{\Omega}{2\pi}$$

La fréquence instantanée est ici la fréquence porteuse, et $|\Psi|$ est l'enveloppe telle qu'elle est définie usuellement. On remarquera l'importance du fait que dans les exponentielles les coefficients de t sont positifs. Négliger cette précaution amènerait à intervertir les rôles de ω et Ω, et conduirait à des résultats absurdes.

8. Tout signal modulé par une fréquence suffisamment élevée peut étre considéré comme analytique.

Le fait que dans l'exemple précédent on retrouve pour la fréquence instantanée la fréquence porteuse n'est pas isolé, mais résulte de la proposition suivante :

Quel que soit la signal $s(t)$, la fonction :

$$\overline{\Psi}(t) = s(t)e^{j\omega_0 t} \qquad \omega_0 > 0$$

qui n'est pas en général un signal analytique, se rapproche d'autant plus du signal analytique $\Psi(t)$ *(associé à* $s(t)\cos\omega_0 t$*) que* ω_0 *est plus grand :*

On voit immédiatement que cela a pour conséquence d'attribuer, pour les grandes valeurs de ω_0, la fréquence instantanée $\omega_0/2\pi$ à $s(t)\cos\omega_0 t$.

La proposition que nous venons d'utiliser est elle-même une conséquence immédiate du fait qu'un signal analytique est caractérisé par la particularité d'avoir un spectre dont l'amplitude est nulle pour les fréquences négatives. Or, moduler $s(t)$ par $e^{j\omega_0 t}$ revient à faire subir une translation ω_0 au spectre de $s(t)$. Pour une valeur de ω_0 suffisamment grande, le spectre se trouve tout entier dans la région des fréquences positives, et $s(t)e^{j\omega_0 t}$ devient analytique.[1)]

IV. — DEUXIÉME PARTIE : VITESSE DE GROUPE ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE

9. Vitesse de groupe et vitesse de phase.

On sait que si un signal possède une vitesse de phase V_φ, sa vitesse de groupe est :

$$V_g = \frac{d\omega}{d(\omega/V_\varphi)} \tag{1}$$

On constate sur cette formule que les caractéristiques simples sont plutôt les *inverses* des vitesses de groupe et de phase, c'est-à-dire les temps de propagation de groupe et de phase sur une longueur donnée.

10. Époque de groupe d'un signal considérée comme moyenne pondérée des époques de groupes des différentes fréquences.

Considérons maintenant un signal analytique $\Psi(t)$, et soit $\Phi(f)$ son spectre[2)]; nous avons :

$$\Psi(t) = \int \Phi(f)e^{2\pi jft}df \tag{2}$$

$$\Phi(f) = \int \Psi(t)e^{-2\pi jft}dt \tag{3}$$

$$(-1)^n \int \Psi^* t^n \Psi dt = \int \Phi^* \left[\frac{1}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right]^n \Psi dt \tag{4}$$

$$\int \Phi^* f^n \Phi df = \int \Psi^* \left[\frac{1}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right]^n \Psi dt \tag{5}$$

Cherchons à évaluer l'*époque* du signal. Nous pouvons considérer que l'énergie du signal se manifeste à raison de la densité $\Psi^*\Psi$ pendant l'intervalle dt. Ceci nous donne pour l'époque une valeur moyenne :

$$\bar{t} = \frac{\int \Psi^* t \Psi dt}{\int \Psi^* \Psi dt} \tag{6}$$

Cette époque, étant déterminée par des considérations energétiques, sera appelée *époque de groupe.* Utilisons maintenant la formule (4) ; nous obtenons :

$$\bar{t} = -\frac{1}{2\pi j}\frac{\int \Phi^* \frac{d}{df}\Phi df}{\int \Phi^* \Phi df} \tag{7}$$

---

1) Là est la véritable raison de l'emploi par GABOR de signaux en cloche *modulés.*

2) Nous utilisons, selon les cas, les notations ω ou f pour la fréquence, mesurée en radians/sec ou cycles/sec, respectivement. Les spectres sont alors représentés par $S(w)$ ou $\Phi(f)$.

Mettons en évidence le module et l'argument de Φ :

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d}{df}\Phi = \frac{1}{|\Phi|}\frac{d}{df}\Phi + j\frac{d}{df}\arg\Phi$$

Comme $\bar{t}$ est réel, nous obtenons :

$$\bar{t} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\int \Phi^*\Phi\frac{d}{df}\arg\Phi df}{\int \Phi^*\Phi df} \tag{8}$$

Considérons maintenant que l'énergie du signal se répartit dans l'échelle des fréquences avec une densité $\Phi\Phi^*$; nous voyons que $\bar{t}$, *époque de groupe relative au signal tout entier,* s'obtient en prenant la moyenne pondérée des quantités :

$$\bar{t}_f = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\arg\Phi \tag{9}$$

que nous considérerons donc comme les *époques de groupe relatives aux différentes fréquences.* Nous voyons ainsi que la *puissance associée à la fréquence f* peut être considérée comme se manifestant, avec d'ailleurs un certain étalement, à *l'instant moyen $\bar{t}_f$.*

11. Fréquence moyenne d'un signal considérée comme moyenne pondérée des différentes fréquences instantanées.

Intervertissons maintenant le rôle de f et de t. Nous constatons alors que la fréquence moyenne du signal, définie par :

$$\bar{f} = \frac{\int \Phi^* f\Phi df}{\int \Phi^*\Phi df}$$

peut être définie également par :

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi}\frac{\int \Psi^*\Psi\frac{d}{dt}\arg\ \Phi dt}{\int \Psi^*\Psi dt}$$

c'est-à-dire comme *moyenne pondérée d'une fréquence instantanée* :

$$f_t = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\arg\Psi \qquad \text{(dans } c/s\text{)} \tag{10}$$

Nous retrouvons bien l'expression que nous avons déjà rencontrée.

V. — TROISIÈME PARTIE : RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE DANS UN DIAGRAMME TEMPS-FRÉQUENCE.

12. Fonction caractéristique de la répartition d'energie

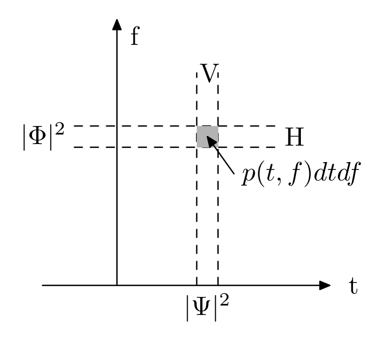


Fig. 3. — *A l'élément dt df, dans le diagramme temps fréquence, correspond une énergie $p(t,f)dtdf$. La répartition de ces énergies dans une bande verticale donne le spectre instantané à l'instant t ; dans une bande horizontale, nous obtenons l'étalement dans le temps de énergie portée par une fréquence. Par projection sur les axes, on obtient le signal (sur l'axe des temps) et son spectre (sur l'axe des fréquences).*

Nous allons définir maintenant une répartition de l'énergie dans le temps *et* dans l'échelle des fréquences, de la forme (*fig.* 3)

$$p(t,f)dtdf \tag{1}$$

Nous supposerons dans ce qui suit, que nous avons affaire à un signal normé, pour lequel :

$$\int \Phi^*\Phi df = \int \Psi^*\Psi dt = 1 \tag{2}$$

ce qui ne restreint en rien la généralité. p jouit alors des mêmes propriétés qu'une fonction de distribution de probabilités, et nous allons déterminer sa *fonction caractéristique* :

$$F(u,\nu) = \iint e^{j(ut+\nu f)} p(t,f)dtdf \tag{3}$$

Nous avons à calculer la valeur moyenne de $e^{j(ut+\nu f)}$ mais nous n'avons pour ce faire que la fonction Ψ, qui ne contient pas f, ou Φ, qui ne contient pas t. Nous sommes donc obligés de considérer soit t, soit f comme un opérateur. Si nous nous servons de Ψ, nous serons amenés à la formule :

$$F(u,\nu) = \int \Psi^* e^{j\left(ut+\frac{\nu}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right)}\Psi(t)dt \tag{4}$$

Voyons ce que donne cet opérateur exponentiel, appliqué à Ψ. Si nous le décomposons en deux, nous obtenons, selon l'ordre dans lequel nous considérons les facteurs :

$$e^{jut}e^{\frac{\nu}{2\pi}}\frac{d}{dt}\Psi(t) = e^{jut}\Psi\left(t+\frac{\nu}{2\pi}\right)$$

ou :

$$e^{\frac{\nu}{2\pi}}\frac{d}{dt}e^{jut}\Psi(t) = e^{ju}\left(t+\frac{\nu}{2n}\right)\Psi\left(t+\frac{\nu}{2\pi}\right)$$

Ces formules sont inacceptables, comme incompatibles avec la relation :

$$F^*(u,\nu) = F(-u,-\nu)$$

que l'on déduit de (3) (pour u, ν réels).

Considérons maintenant la moyenne géométrique[3)] des deux résultats donnés par les formules précédentes, soit :

$$e^{j\left(ut+\frac{\nu}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right)}\Psi(t) = e^{ju}\left(t+\frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t+\frac{\nu}{2\pi}\right) \tag{5}$$

[3)] La forme (5) de l'opérateur considéré est celle que l'on obtient si l'on suppose que l'on développe les puissances $\left(\mu t+\frac{\nu}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right)^n$ *en conservent l'ordre des termes.*

Nous obtenons (avec un léger changement de notations) :

$$F(u,\nu) = \int \Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)e^{jut}dt \tag{6}$$

qui est une forme acceptable de $F(u,\nu)$.

13. Répartition d'énergie. Spectre instantané ; étalement dans le temps de l'énergie associée à une fréquence.

La présence du facteur e^{jut} nous montre que la fonction caractéristique de f quand t est connu n'est autre que :

$$\Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)\Big/|\Psi|^2 \tag{7}$$

d'où la fonction de distribution de f *quand* t *est connu* :

$$p_t(f) = \frac{1}{2\pi|\Psi|^2}\int \Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)e^{-j\nu f}d\nu \tag{8}$$

La fonction de distribution de t étant $|\Psi(t)|^2$, nous obtenons en définitive :

$$p(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int \Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)e^{-j\nu f}d\nu \tag{9}$$

Le *spectre instantané,* en module[4)], est donné par la formule (8) ; d'une manière analogue, la répartition, dans le temps, de l'énergie attachée à une fréquence serait :

$$p_f(t) = \frac{1}{2\pi|\Phi|^2}\int \Phi^*\left(t + \frac{u}{4\pi}\right)\Phi\left(t - \frac{u}{4\pi}\right)e^{-jut}du \tag{10}$$

VI. — QUATRIÈME PARTIE : APPLICATIONS DE LA NOTION DE SIGNAL ANALYTIQUE.

La dualité qui existe entre temps et fréquence permet de se faire une idée plus claire de certains phénomènes ; nous allons traiter ici quelques exemples typiques.

14. Étalement d'un signal dans le temps. Distorsion d'amplitude et distorsion de phase.

Soit $\Psi(t)$ un signal analytique. Si nous nous attachons à la fréquence, nous constatons que ce signal a une enveloppe $|\Psi(t)|$ qui module un signal à fréquence instantanée variable. Donc, dans l'étalement des fréquences, nous devons nous attendre à voir apparaître *deux termes,* l'un tenant compte de la *variation de la fréquence instantanée,* l'autre des *variations d'amplitude de l'enveloppe.* Analytiquement, supposons donc que nous avions pris pour origine des fréquences la fréquence moyenne $\overline{f}$, moyenne des fréquences instantanées[5)]. Nous avons ainsi :

$$\overline{f} = \int \Psi^*\Psi f_t dt = 0 \tag{1}$$

[4)] Il ne semble pas possible d'atteindre la phase du spectre instantané.

[5)] Nous supposons encore ici que le signal est normé.

L'étalement en fréquences sera :

$$\overline{f^2} = \int \Phi^* f^2 \Phi df \tag{2}$$

et l'étalement des fréquences instantanées :

$$\overline{f_t^2} = \int \Psi^* f_t^2 \Psi dt \tag{3}$$

Formons la différence et exprimons tout en fonction de Ψ

$$\overline{f^2} - \overline{f_t^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \int \left[\Psi^* \frac{d}{dt^2} \Psi + \Psi^* \left(\frac{d}{dt} \arg \Psi \right)^2 \Psi \right] dt \tag{4}$$

Posons :

$$\Psi = |\Psi| e^{j \arg \Psi}$$

La dérivation donne :

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d}{dt} \Psi = \frac{1}{|\Psi|} \frac{d}{dt} |\Psi| + j \frac{d}{dt} \arg \Psi$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2}{dt^2} \Psi - \frac{1}{\Psi^2} \left(\frac{d}{dt} \Psi \right)^2 = -\frac{1}{|\Psi|^2} \left(\frac{d}{dt} |\Psi| \right)^2 + \text{ etc}\ldots$$

Portant l'expression de $\frac{1}{\Psi} \frac{d^2}{df^2} \Psi$ dans (4) et ne conservant que les termes réels, il vient :

$$\overline{f^2} - \overline{f_t^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \int \left[\frac{d}{dt} |\Psi| \right]^2 dt$$

d'où l'expression finale pour $\overline{f^2}$:

$$\overline{f^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \Psi \Psi^* \left[\left(\frac{d}{dt} \arg \Psi \right)^2 + \left(\frac{1}{|\Psi|} \frac{d}{dt} |\Psi| \right)^2 \right] dt \tag{5}$$

Nous voyons bien apparaître les deux termes prévus, l'un relatif à l'étalement des fréquences instantanées, l'autre aux variations d'amplitude de l'enveloppe.

Si nous raisonnons maintenant sur l'étalement dans le temps, nous obtiendrons, en prenant pour origine le temps moyen $\bar{t}$:

$$\overline{t^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \Phi \Phi^* \left[\left(\frac{d}{df} \arg \Phi \right)^2 + \left(\frac{1}{|\Phi|} \frac{d}{df} |\Phi| \right)^2 \right] df \tag{6}$$

Nous retrouvons là des notions familières ; en effet, si nous supposons que le signal a été produit par le passage d'une impulsion de Dirac à travers un filtre de caractéristique $\Phi(f)$, nous retrouvons dans $\overline{t^2}$ les deux éléments de la distorsion, le premier terme résultant de la distorsion de phase, le second de la distorsion d'amplitude. Nous remarquons que la distorsion de phase ici introduite est une *distorsion de temps de propagation de groupe* (≪delay distorsion≫).

En faisant intervenir les logarithmes, nous obtenons, pour les dispersions de temps et de fréquence, les expressions :

$$\overline{f^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \left| \Psi^* \frac{d}{dt} \log \Psi \right|^2 dt = \int \left| \frac{d\Psi}{dt} \right|^2 dt$$

$$\overline{t^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \left| \Phi^* \frac{d}{df} \log \Phi \right|^2 df = \int \left| \frac{d\Phi}{df} \right|^2 df \tag{7}$$

15. Admittances de transfert.

Soit une admittance de transfert $Y(j\omega)$. On sait que si ω est complexe, les courants amortis de la forme $e^{j\omega t}$ sont tels que la partie imaginaire de ω soit positive. Donc $Y(j\omega)$ est réguliére dans le demi-plan inférieur. Si nous nous reportons aux propriétés des signaux analytiques, nous voyons ainsi que l'on peut passer de la forme d'une admittance à la forme d'un signal analytique par le changement de variable :

$$\omega = -t \tag{8}$$

Si $\Psi(t)$ est un signal analytique, nous pouvons en déduire une impédance de transfert par la formule :

$$Y(j\omega) = \Psi(-\omega) \tag{9}$$

L'admittance impulsive associée à $Y(j\omega)$ est :

$$B(t) = \frac{1}{2\pi}\int Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{10}$$

Par ailleurs, le spectre de $\Psi(t)$ est :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-j\omega t}\Psi(t)dt = B(\omega) \tag{11}$$

Nous constatons que $B(t)$ est null pour les valeurs négatives de t, de même que $S(\omega)$ est null pour les valeurs négatives de ω. La seule restriction nouvelle à imposer est que $B(t)$ soit réel, ce qui entraîne que $\omega(t)$ soit un signal analytique *symétrique,* c'est-à-dire tel que :

$$\Psi(-t) = \Psi^*(t) \qquad \text{(pour } t \text{ réel)} \tag{12}$$

Sous la condition (12), il y a concordance parfaite entre admittances de transfert et signaux analytiques, entre spectres et admittances impulsionnelles.

16. Filtres passe-bandes ; exemples d'admittances physiquement réalisables.

La formation de l'admittance de transfert d'un filtre est analogue, avons-nous vu, à la formation d'un signal analytique. Or, pour former un signal analytique, il suffit de partir d'un signal quelconque $s(t)$, et de former son spectre, ce qui donne :

$$s(t) = \int S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad [S(-\omega) = S^*(\omega)] \tag{13}$$

et ensuite, de ne conserver, en la doublant, que la partie de ce spectre correspondant aux fréquences positives, ce qui conduit à :

$$\Psi(t) = 2\int_0^\infty S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{14}$$

Pour ne pas couper dans ce spectre, on peut le déporter vers la droite par une modulation convenable.

Le procédé correspondant pour former une admittance de transfert est le suivant :

On part d'une admittance non physiquement réaisable, soit $Y_1(j\omega)$, et on détermine l'admittance impulsive $B_1(t)$ correspondante :

$$B_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int Y_1(j\omega t)e^{j\omega}d\omega \tag{15}$$

$B_1(t)$ ne s'annule pas pour $t < 0$ (c'est là ce qui indique que Y_1 n'a pas de réalité physique). On déporte ensuite $B_1(t)$ vers la droite, et on la coupe, de manière que $B_1(t) = 0$ pour $t < 0$. On en déduit Y :

$$Y(j\omega) = \int_0^\infty B(t)e^{-j\omega t}dt \tag{16}$$

Si T est l'amplitude de la translation que l'on a fait subir à $B_1(t)$, nous obtenons :

$$Y(j\omega) = \int_0^\infty B_1(t-T)e^{-j\omega t}dt$$

Si $B_1(t)$ est symétrique, on peut aussi couper la fin du signal, ce qui donne :

$$Y(j\omega) = \int_0^{2T} B_1(t-T)e^{-j\omega t}dt \tag{17}$$

Cette dernière admittance présente alors l'avantage de ne pas avoir de distorsion de phase. Mais il y a une distorsion d'amplitude. Soit, par exemple :

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad \text{et} - \omega_2 < \omega < -\omega_1 \\ 0 & \text{en dehors des intervalles ci-dessus} \end{cases} \tag{18}$$

$$B_1(t) = \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{\pi(\omega_2-\omega_1)t}$$

$$Y(j\omega) = \int_0^{2T} \frac{\sin\omega_2(t-T) - \sin\omega_1(t-T)}{\pi(\omega_2-\omega_1)(t-T)}$$

$Y(j\omega)$ a pour argument $-\,j\omega T$; il n'y a donc pas de distorsion de phase. Par ailleurs, quand T tend vers l'infini, $|Y|$ tend bien vers la caractéristique d'un passe-bande idéal ; mais au voisinage de ω_1 et ω_2 se présentent des oscillations dues au phénomène de Gibbs.

17. Courbes d'admittance ≪en cloche≫.

Les courbes d'admittance ≪en cloche≫ permettent d'éviter cette difficulté. On sait que le signal :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{19}$$

a le spectre :

$$S(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \tag{20}$$

d'où, pour le signal :

$$s(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{21}$$

le spectre :

$$S(\omega) = e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} e^{-j\omega t_0} \tag{22}$$

Si nous modulons par $e^{j\omega_0(t-t_0)}(\omega_0 > 0)$, nous déplaçons le spectre de ω_0, d'où :

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega_0(t-t_0)} \\ S(\omega) &= e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} e^{-j\omega t_0} \end{aligned} \tag{23}$$

Dès que $\omega_0 > \frac{3}{\sigma}, S(\omega)$ peut être considéré comme situé dans la région $\omega > 0$. Au signal :

$$s(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \cos\omega_0(t-t_0) \tag{24}$$

correspond le spectre :

$$S(\omega) = e^{-j\omega t_0} \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} + e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}}\right] \tag{25}$$

Pour $t_0 > 3\sigma$, nous pouvons considérer $S(\omega)$, donné par (25), comme une admittance de transfert. Pour $\omega_0 > 3/\sigma$, nous pouvons ne conserver dans (25) que le premier terme du crochet. On constate facilement que si dans (24) on remplace le cosinus par un sinus, cela revient à remplacer (25) par :

$$S(\omega) = je^{-j\omega t_0} \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} - e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}}\right] \tag{26}$$

Supposons que nous voulions spécifier un passe-bande dans la bande (ω_1, ω_2). Nous choisirons $\sigma > 3/\omega_1$, $t_0 > 3\sigma > 9/\omega_1$ et intégrerons en w_0 entre ω_1 et ω_2, ce qui donne (en ajoutant des coefficients convenables) :

$$\begin{aligned} Y(j\omega) = S(\omega) &= e^{-j\omega t_0} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} d\omega_0 \\ s(t) = B(t) &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sin\omega_2(t-t_0) - \sin\omega_1(t-t_0)}{t-t_0} \end{aligned} \tag{27}$$

Un filtre passe-bas serait caractérisé par :

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= e^{-j\omega t_0} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} d\omega_0 \\ B(t) &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sin\omega_1(t-t_0)}{t-t_0} \end{aligned} \tag{28}$$

18. Filtre déphaseur faisant apparaître le signal en quadrature.

Si, au lieu de (25), nous partons du spectre (26), et que nous intégrions entre 0 et ω_1, nous obtenons un filtre d'un type assez particulier, caractérisé par :

$$(29)\qquad \begin{aligned} Y(j\omega) &= -je^{j\omega t_0}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\omega_1}\left[e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} - e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}}\right]d\omega_0 \\ s(t) = B(t) &= \frac{1}{\pi}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{1-\cos\omega_1(t-t_0)}{t-t_0} \end{aligned}$$

Si ω_1 et σ tendent vers l'infini, nous voyons qu'en supprimant le facteur $e^{-j\omega t_0}$, nous obtenons une impédance de transfert de la forme (pour ω réel) :

$$(30)\qquad Y(j\omega) = j\ \sin\omega$$

Le signal analytique :

$$\Psi(t) = s(t) + j\sigma(t)$$

est ainsi transformé en :

$$\sigma(t-t_0) - js(t-t_0)$$

Donc, $s(t)$ est transformé en $\sigma(t)$: *le filtre défini par les formules (29) présente la propriété de transformer un signal réel $s(t)$ dans son signal en quadrature $\sigma(t)$*, avec une certaine approximation d'autant meilleure que le temps de propagation à travers le filtre est plus grand.

Le filtre (29), pour ω_0 et t_0 grands, ne présente pas de distorsion d'amplitude, mais une distorsion de phase. Son intérêt provient de ce qu'il fournit, nous semble-t-il, le moyen théorique le plus simple de faire apparaître l'existence du signal en quadrature, qui n'était intervenu jusqu'ici que pour des raisons de commodité de calcul.

19. Signal en quadrature et transmission par bande latérale unique.

Nous allons retrouver le signal en quadrature par un autre procédé, fondé sur l'expérience. On sait que le signal en quadrature apparaît comme signal parasite dans la transmission par bande latérale unique ; les considérations développées jusqu'ici permettent une explication claire du phénomène.

Soit un signal réel $s(t)$, occupant les fréquences comprises entre $-\omega_1$ et ω_1. Avec ce signal, modulons une porteuse $\cos\Omega t$, où $\Omega > \omega_1$. Modulons, avec le nouveau signal, une nouvelle porteuse $\cos\Omega t$, et filtrons par un passe-bande de bande $(-\Omega,\ \Omega)$. Nous obtenons le signal :

$$s(t)\cos^2\Omega t = \frac{1}{2}s(t)\big[1+\cos 2\Omega t\big]$$

ce qui, après filtrage, donne bien $1/2\ s(t)$. Tel est le cas idéal de transmission *sur deux bandes latérales.*

Supposons maintenant que la deuxième porteuse soit déphasée par rapport à la première ; soit $\cos(\Omega t+\varphi)$ cette porteuse. Nous obtiendrons le signal :

$$s(t)\cos\Omega t\cos(\Omega t+\varphi) = \frac{1}{2}s(t)\big[\cos\varphi + \cos(2\Omega t+\varphi)\big]$$

ce qui, après filtrage, donne $1/2\ s(t)\cos\varphi$. *Le déphasage se traduit par un affaiblissement du signal.*

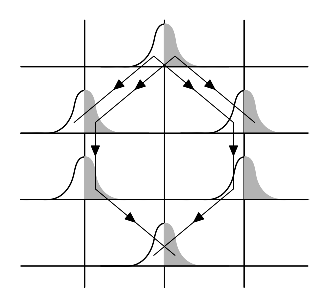


Fig. 4. — *Le spectre du signal est déporté vers la droite et vers la gauche, par la première modulation. Le filtrage supprime les hautes fréquences (correspondant que fréquences primitivement positives pour le spectre droit, primitivement négatives pour le spectre gauche). La deuxième modulation, si elle est en phase avec la première, reconstitue le spectre primitif, en remettant en place les fréquences positives et négatives. Si elle est déphasée par rapport à la première modulation, les fréquences positives et négatives se trouvent elles-mêmes déphasées, d'où apparition d'un signal en quadrature.*

Si nous opérons avec une seule bande latérale, soit la bande inférieure, nous aurons à intercaler un filtre entre les deux modulations, ce qui nous oblige à faire intervenir $\Psi(t)$. Soit $S(\omega)$ le spectre de $\Psi(t)$. Après la première modulation, ce spectre est devenu :

$$\frac{1}{2}\Big[S(\omega-\Omega)+S(\omega+\Omega)\Big]$$

Nous ne gardons que la bande inférieure, et procédons à la deuxième modulation (*fig.* 4). Si la deuxième porteuse est en phase avec la première, nous reconstituons le spectre primitif ; mais si elle n'est pas en phase, c'est-à-dire si nous multiplions par :

$$\frac{1}{2}\Big[e^{j(\Omega t+\varphi)}+e^{-j(\Omega t-\varphi)}\Big]$$

nous constatons qu'une moitié du spectre, la moitié droite, est multipliée par $e^{j\varphi}$, la moitié gauche par $e^{-j\varphi}$. Le signal final a donc un spectre tel que :

$$\text{pour } \omega>0 \qquad S_1(\omega)=\frac{1}{4}e^{j\varphi}S(\omega)$$

$$\text{pour } \omega<0 \qquad S_1(\omega)=\frac{1}{4}e^{-j\varphi}S(\omega)$$

Le signal analytique correspondant est donc :

$$\Psi_1(t)=\frac{1}{4}e^{j\varphi}\Psi(t)$$

Il y a eu *déphasage* de $\Psi(t)$, et par conséquent *le signal en quadrature s'introduit.* Nous avons exactement :

$$s_1(t)=\frac{1}{4}\Big[s(t)\cos\varphi-\sigma\sin\varphi\Big]$$

Nous voyons ainsi apparaître la différence essentielle entre les deux modes de transmission sur deux bandes latérales ou sur une seule bande latérale.

Le 1er septembre 1947